

Exercice 4.4. Vive les couches !

*

On estime aujourd'hui que la probabilité pour une femme qui attend un enfant d'avoir un garçon est d'environ 51% et que la probabilité d'avoir une fille est d'environ 49%. Vous et votre moitié avez décidé d'avoir 5 enfants.

- 1) Quelles sont vos chances de n'avoir que des garçons ?
- 2) Quelles sont vos chances d'avoir 2 filles exactement ?
- 3) Quelles sont vos chances d'avoir au moins 2 filles ?

$$P(G) = 0,51$$

$$P(F) = 0,49$$

$$F \sim B(5; 0,49)$$

$$P(F=k) = C_5^k \times 0,49^k \times 0,51^{5-k}$$

$$1) P(F=0) = 0,51^5 = 0,0345$$

$$\begin{aligned} 2) P(F=2) &= C_5^2 \times 0,49^2 \times 0,51^3 \\ &= \frac{5!}{2! 3!} \times 0,49^2 \times 0,51^3 = 0,3185 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) P(F \geq 2) &= 1 - P(F \leq 1) \\ &= 1 - (P(F=0) + P(F=1)) \\ &= 1 - (0,0345 + C_5^1 \times 0,49 \times 0,51^4) \\ &= 1 - (0,0345 + 0,1657) \\ &= 0,7998 \end{aligned}$$

Le responsable d'un centre de télémarketing a réalisé une segmentation très précise de ses prospects. Grâce à son travail en amont, ses télévendeurs augmentent leurs chances de remporter des contrats. En particulier, lorsqu'un vendeur contacte un prospect de la catégorie « rouge », il a en moyenne 80% de chances de réaliser une vente. Un des vendeurs décide d'appeler successivement trois prospects de la catégorie « rouge ».

1) Quelle est la probabilité qu'il réalise au moins 2 ventes ?

En étudiant de manière plus approfondie le comportement des télévendeurs, le responsable se rend compte à quel point la motivation influence les résultats. Il existe pour lui une « spirale de réussite », car un succès appelle un autre succès. Concrètement, il remarque que ses télévendeurs ont bien 80% de chance de conclure une vente lors de leur premier appel, mais que cette probabilité change lors de l'appel suivant et dépend de ce qui s'est passé auparavant. La probabilité de conclure une vente est de 90% si l'appel précédent est suivi d'une vente, et de 60% dans le cas contraire. Compte tenu de ces nouvelles informations :

2) Présentez sous la forme d'un arbre la nouvelle distribution des probabilités.

3) Quelle est la nouvelle probabilité qu'il réalise au moins 2 ventes ?

$$X \sim B(3; 0,8)$$

$$P(X = k) = C_n^k \times 0,8^k \times (1-0,8)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,384 + 0,512 \\ &= 0,896 \end{aligned}$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \times 0,8^2 \times 0,2 = 0,384$$

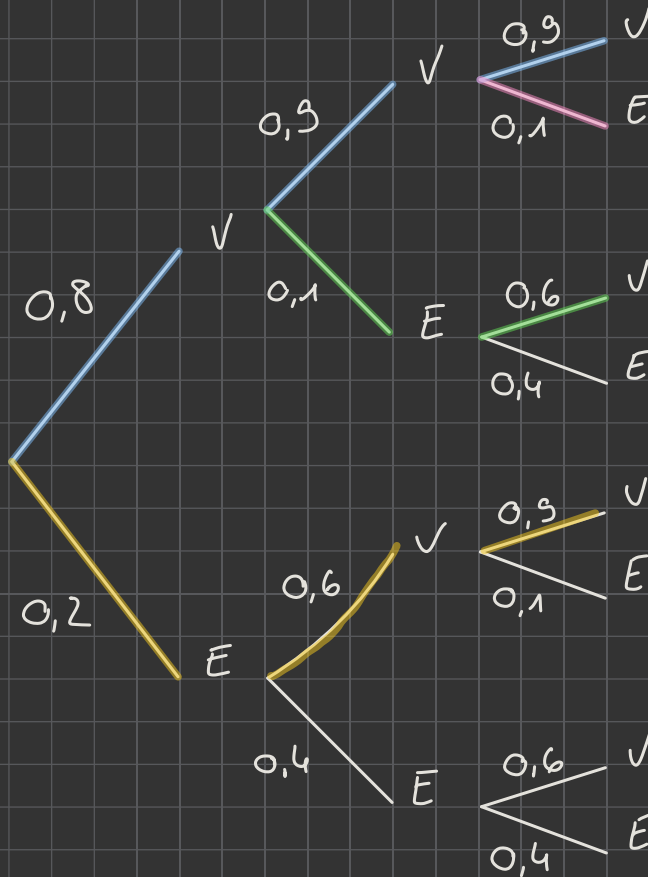
$$P(X = 3) = C_3^3 \times 0,8^3 = 0,512$$

LICENCE +



Tout pour réussir !

2)



$$P_1 = 0,8 \times 0,9 \times 0,9$$

$$P_2 = 0,8 \times 0,9 \times 0,1$$

$$P_3 = 0,8 \times 0,1 \times 0,6$$

$$P_4 = 0,2 \times 0,6 \times 0,9$$



$$3) P(V \geq 2) = \sum P_i = 0,876$$

Exercice 4.6. Pile je gagne, face tu perds

Une pièce amène pile avec une probabilité p et face avec une probabilité $q = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. On lance $6n$ fois de suite la pièce (avec $n \geq 1$). Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre des lancers amenant pile.

1) Déterminez la loi de X_n ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

2) Donnez un équivalent de : $U_n = P(X_n = n)$ quand n tend vers $+\infty$ en utilisant la formule de Stirling.

$$X \sim B(6n; p)$$

$$P(X=k) = \binom{6n}{k} p^k q^{6n-k}$$

$$1) E(X_n) = 6np$$

$$V(X_n) = 6npq$$

$$E(X) = n \times p$$

$$V(X) = n \times p \times q$$

$$2) U_n = \binom{6n}{n} p^n q^{5n} = \frac{(6n)!}{n!(5n)!} p^n q^{5n}$$

formule de Stirling : pour les factorielles

$$k! \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\bullet (6n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{12\pi n} \left(\frac{6n}{e}\right)^{6n}$$

$$\bullet n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\bullet 5n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{10\pi n} \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}$$



1^{ère} étape : on s'occupe seulement des racines

$$\frac{\sqrt{12\pi n}}{\sqrt{2\pi n} \times \sqrt{10\pi n}} = \sqrt{\frac{12\pi n}{20\pi^2 n^2}} = \sqrt{\frac{3}{5\pi n}}$$

2^{ème} étape : on s'occupe des puissances

$$\frac{\left(\frac{6n}{e}\right)^{6n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \times \left(\frac{5n}{e}\right)^{5n}} = \frac{(6n)^{6n} \times e^{-6n}}{n^n \times e^{-n} \times (5n)^{5n} \times e^{-5n}}$$

$\xrightarrow{\text{pink arrow}} 6^{6n} \times n^{6n} \times e^{-6n}$
 $\xrightarrow{\text{pink arrow}} n^n \times e^{-n} \times 5^{5n} \times n^{5n} \times e^{-5n}$

1) On s'occupe des exponentielles

$$\frac{e^{-6n}}{e^{-n} \times e^{-5n}} = \frac{e^{-6n}}{e^{-6n}} = 1$$



2) On s'occupe des n.

$$\frac{n^{6n}}{n^n \times n^{5n}} = \frac{n^{6n}}{n^{6n}} = 1$$

Donc il rest $\frac{6^{6n}}{5^{5n}}$

$$U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{5\pi n}} \times \frac{6^{6n}}{5^{5n}} p^n q^{5n}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5\pi n}} \times \left(\frac{6^6}{5^5}\right)^n \times p^n \times q^{5n}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5\pi n}} \times \left(\frac{6^6 p q^5}{5^5}\right)^n$$